Exercice :

Soit U la suite réelle définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n^{\,2} - U_n + 2}{1 + U_n} \end{cases}$,pour tout $n \in IN$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < U_n \leq 2$.

b) Etudier la monotonie de la suite U. En déduire que U est convergente et calculer sa limite.

2) a) Montrer que pour tout n de IN on a : $0 \leq U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$.

b) En déduire que pour tout $n \in IN$, $0 \leq U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, retrouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

3) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$ pour tout $n \in IN^*$

a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ on a : $n < S_n \leq n + 1 - (\frac{1}{2})^n$

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{n}$

1) a)

- pour $n = 0$ $\quad 1 < U_0 = 2 \leq 2$ (Vraie)

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $1 < U_n \leq 2$

et montrons que $1 < U_{n+1} \leq 2$.

On a $U_{n+1} - 1 = \dfrac{U_n^2 - U_n + 2}{1 + U_n} - 1$

$= \dfrac{U_n^2 - U_n + 2 - 1 - U_n}{1 + U_n}$